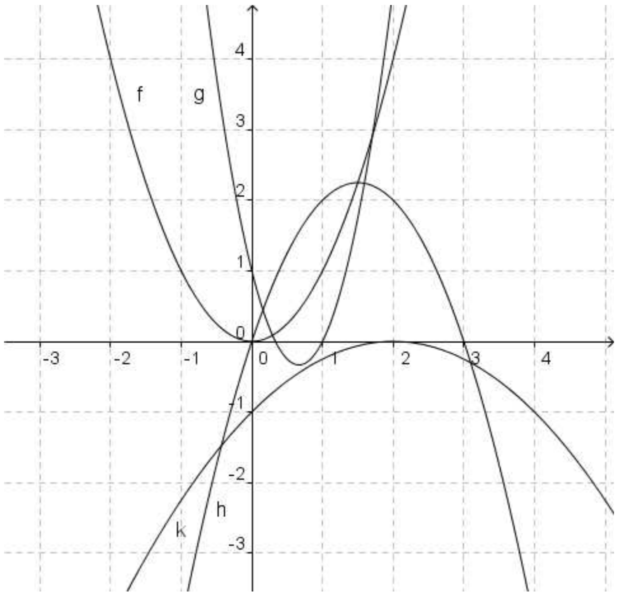
3.3 Kwadratische functies.

De eenvoudigste kwadratische functie is: $f(x) = x^2$.

Maar ook: $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $h(x) = -x^2 + 3x$ en $k(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$ zijn kwadratische functies.



De algemene vorm van een kwadratische functie is:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, waarbij *a, b* en *c* constanten zijn (vaste getallen) en natuurlijk $a \neq 0$

Kwadratische functies hebben als grafiek een parabool.

Een parabool heeft een top, dit is het hoogste of laagste punt van de grafiek en een symmetrie-as

De symmetrie-as van f(x) is de y-as, van k(x) is het de lijn *x = 2.* Dit is de verticale lijn door (2,0)

De snijpunten van de grafiek van h met de x-as kun je vinden door de vergelijking $h(x) = 0$, dus $-x^2 + 3x = 0$ op te lossen. Vaak lukt dit m.b.v. ontbinden in factoren, soms met de bordjesmethode.

Van *h(x)*: $-x^2 + 3x = 0 \iff -x(x-3) = 0 \iff$ *x = 0* of *x = 3.* Dus (0,0) en (3,0).

Van *g(x)*: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff (3x-1)(x-1) = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ of $x = 1$. Dus $(\frac{1}{3},0)$ en (1,0).

Ook is er nog de methode: **kwadraat afsplitsen.** Dit is niet zo'n snelle methode maar hij werkt wel altijd! De methode maakt gebruik van de merkwaardige producten: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Vb: $k(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1 = 0 \iff -\frac{1}{4}x^2 + x = 1 \iff x^2 - 4x = -4$. Nu links en rechts +4 om de vorm $a^2 - 2ab + b^2$ te krijgen. Dus: $x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$

Of een wat moeilijker voorbeeld:

$$g(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \iff 3x^2 - 4x = -1 \iff x^2 - \tfrac{4}{3}x = \tfrac{-1}{3} \iff x^2 - \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9} = \tfrac{-1}{3} + \tfrac{4}{9}$$

$$\iff (x - \tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{1}{9} \iff x - \tfrac{2}{3} = \tfrac{-1}{3} \text{ of } x - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} \iff x = \tfrac{1}{3} \text{ of } x = 1$$

Of een nog moeilijker voorbeeld, maar met hetzelfde principe:

Bereken de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 = 3x^2 - 4x + 1 \iff 0 = 2x^2 - 4x + 1 \iff 2x^2 - 4x = -1 \iff$$

$$x^2 - 2x = \tfrac{-1}{2} \iff x^2 - 2x + 1 = \tfrac{-1}{2} + 1 \iff (x-1)^2 = \tfrac{1}{2} \iff x - 1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ of } x - 1 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

En aangezien $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4} \cdot 2} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} \cdot \sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn: $x = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en $x = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ de oplossingen.

De **abc formule** is afgeleid van de methode van kwadraatafsplitsen. Deze methode werkt ook altijd en is redelijk snel.

Van $ax^2 + bx + c = 0$ zijn $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ de oplossingen.

Natuurlijk is er geen oplossing als $b^2 - 4ac < 0$, want dan bestaat de wortel niet. Als $b^2 - 4ac = 0$ dan is er automatisch maar één oplossing. Daarom heet $b^2 - 4ac$ wel de Discriminant van de 2e graads vergelijking.

Nog eens het laatste voorbeeld, maar nu met de abc formule:

$2x^2 - 4x + 1 = 0$ *a = 2, b = -4, c = 1* $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$.

$x = \dfrac{--4 - \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \dfrac{4 - \sqrt{4 \cdot 2}}{4} = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4}{4} - \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ of $x = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$.